Universidade Federal da Bahia
Campus Ondina – Salvador

3ª.PROVA (GABARITO) – MATB34

31 DE AGOSTO DE 2024

Questão 1 (valor: 2.5)**.** *Determine os focos, os vértices e os parâmetros da elipse de equação*

$$\mathbb{E}\colon 7x^2+2xy+7y^2+12x-12y-36=0\ .$$

Solução possível. Rotacionando os eixos de θ (radianos), obtemos $7x^2+2xy+7y^2=a'u^2+b'uv+c'v^2$, onde $a'+c'=14$ e

$$\begin{pmatrix} b' \\ a'-c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Portanto

$$0=b'=2\cos(2\theta) \Leftrightarrow \cos(2\theta)=0\ .$$

Podemos usar $2\theta=\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\theta=\frac{\pi}{4}$. Neste caso, $a'-c'=2$ e, consequentemente, $a'=8$ e $c'=6$. Sendo assim, $7x^2+2xy+7y^2=8u^2+6v^2$. Dado que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, deduzimos que

$$12(x-y)=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)-\frac{\sqrt{2}}{2}(u+v)\right)=-12\sqrt{2}v\ .$$

No sistema $u-v$:

$$8u^2+6v^2-12\sqrt{2}v=36 \Leftrightarrow 8u^2+6\left(v-\sqrt{2}\right)^2=48 \Leftrightarrow \frac{u^2}{6}+\frac{\left(v-\sqrt{2}\right)^2}{8}=1\ .$$

De fato, $\mathbb{E}$ é elipse de centro $C=\left(0,\sqrt{2}\right)$. Ainda, $\mathbb{E}$ tem eixo focal vertical e parâmetros, $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$ e $c=\sqrt{2}$. Sendo assim, seus focos são $F_1=(0,0)$ e $F_2=\left(0,2\sqrt{2}\right)$; enquanto seus vértices são $A_1=\left(0,-\sqrt{2}\right)$, $A_2=\left(0,3\sqrt{2}\right)$, $B_1=\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ e $B_2=\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$.

Concluímos que, no sistema $x-y$ (original), $C=(-1,1)$, $F_1=(0,0)$, $F_2=(-2,2)$, $A_1=(1,-1)$, $A_2=(-3,3)$, $B_1=\left(-\sqrt{3}-1,-\sqrt{3}+1\right)$ e $B_2=\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)$. □

Questão 2 (valor: 2.5)**.** *Seja a reta* $\mathbf{r}\colon x+\sqrt{3}\cdot y+3=0$*. Determine equação (cartesiana) para a parábola de diretriz* $\mathbf{r}$ *e foco na origem.*

Solução possível. Seja Γ a parábola de foco em $(0,0)$ e de diretriz $\mathbf{r}$. Logo, para $X=(x,y)$,

$$X\in\Gamma \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2}=\frac{|x+\sqrt{3}\cdot y+3|}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 4(x^2+y^2)=(x+\sqrt{3}\cdot y+3)^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x^2+4y^2=x^2+3y^2+9+2\sqrt{3}xy+6x+6\sqrt{3}y \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2-6x-6\sqrt{3}y-9=0\ .$$

Sendo assim, $\Gamma\colon 3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2-6x-6\sqrt{3}y-9=0$. □

Questão 3 (valor: 2.5)**.** *As retas $2x+y=3$ e $2x-y=1$ são as assíntotas da hipérbole $\mathbb{H}$. Determine equação para $\mathbb{H}$, sabendo-se que $(1,3)$ é um dos vértices. Determine ainda seu centro, seus focos, seu outro vértice e seus parâmetros.*

Solução possível. Sabemos que o centro de $\mathbb{H}$ é o ponto de encontro das assíntotas. Portanto, $C=(x,y)$ resolve o sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$. Logo $C=(1,1)$. Dado que $(1,3)$ é vértice, $a=2$ e o eixo focal de $\mathbb{H}$ é vertical contido na reta $x=1$. O outro vértice é $(1,-1)$. Para algum $b>0$,

$$\mathbb{H}\colon\ -\frac{(x-1)^2}{b^2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1\ .$$

De acordo com a equação de $\mathbb{H}$ sua assíntotas são $\frac{|x-1|}{b}=\frac{|y-1|}{2}$, ou seja, $2x-by=2-b$ e $2x+by=b+2$. Concluímos que $b=1$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$ e que os focos são $\big(1,1-\sqrt{5}\big)$ e $\big(1,1+\sqrt{5}\big)$. Ainda,

$$\mathbb{H}\colon\ -\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{4}=1\ .$$

□

Questão 4 (valor: 2.5)**.** *Mostre que, se $P=(s,\alpha)_p$ e Γ é a reta de equação polar $r\cdot\cos(\theta-\varphi)+d=0$, então $d(P,\Gamma)=\big|s\cdot\cos(\alpha-\varphi)+d\big|$.*

Solução possível. Passando para as coordenadas cartesianas, deduzimos que $P=(s\cdot\cos\alpha, s\cdot\operatorname{sen}\alpha)$ e a reta tem equação $\Gamma\colon \big(\cos\varphi\big)x+\big(\operatorname{sen}\varphi\big)y+d=0$. Logo

$$d(P,\Gamma)=\frac{\big|(\cos\varphi)s\cdot\cos\alpha+(\operatorname{sen}\varphi)s\cdot\operatorname{sen}\alpha+d\big|}{\sqrt{\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi}}=\big|s\big(\cos\varphi\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\varphi\cdot\operatorname{sen}\alpha\big)+d\big|=\big|s\cdot\cos(\alpha-\varphi)+d\big|\ .$$

□